

Allgemeines

Zum **Umgang mit diesem Lernmodul**

- Alle Kapitel (einzige Ausnahme: Grundlagen) sind **in drei Bereiche eingeteilt**. Der erste Abschnitt enthält Aufgaben, der zweite Erklärungen zu den Aufgaben und der dritte die Lösungen der Aufgaben. Dadurch ist es möglich, sich selbst zu testen, indem Sie die Aufgaben zu lösen versuchen, *ohne* sich die Lösungen anzuschauen. Bei Schwierigkeiten mit den Aufgaben haben Sie die Möglichkeit, sich mithilfe der Hinweise und Erläuterungen auf der zweiten Seite Lösungsstrategien zu erarbeiten. Erst wenn auch das nicht hilft, sollten die Lösungen angeschaut werden. Selbstverständlich dienen die Lösungen auch zur Kontrolle Ihrer Lösungen.
- Das Lernmodul kann der Reihe nach und **vollständig** bearbeitet werden. Sie können sich aber auch mit einzelnen Kapiteln **separat** auseinandersetzen.
- Die **Navigation** im Lernmodul kann entweder über die Auswahl einzelnen Kapitel im Inhaltsverzeichnis auf der linken Seite erfolgen oder durch Nutzung der Vor- und Zurückpfeile zu Beginn und Ende jeder Seite.
- Im letzten Kapitel dieses Lernmoduls befindet sich ein **Stichwortverzeichnis**, über das Sie einzelne Begriffe, die im Lernmodul behandelt werden, direkt anwählen können.
- Die Aufgaben sind zum großen Teil so gestaltet, dass sie **ohne** die Hilfe eines **Taschenrechners** zu lösen sind. Wir möchten diese Vorgehensweise eindringlich empfehlen, da Ingenieure lernen müssen, Größenordnungen abzuschätzen und zu überschlagen. Es ist aus mathematischer Sicht auch nicht nötig, Ergebnisse als Dezimalzahl darzustellen. Z.B. sind bzw. exakte Zahlendarstellungen und damit ohnehin der Dezimalschreibweise vorzuziehen.
- Die **Lösungswege** sind in den meisten Fällen sehr ausführlich aufgeschrieben, um das Nachvollziehen der Ergebnisse zu erleichtern. Im Allgemeinen können einzelne Schritte aus den Lösungswegen problemlos weggelassen werden, ohne dass die Ergebnisse dadurch falsch werden oder nicht mehr nachzuvollziehen sind. Häufig ist der dargestellte Lösungsweg auch nicht der einzig Weg, der zum richtigen Ergebnis führt. Beispielsweise können manchmal Schritte vertauscht werden.

Grundsätzlich gilt im Brückenkurs wie im Studium:

- Lesen Sie sich die Aufgaben gründlich durch!
- Stellen Sie fest, was gegeben und was gesucht ist!
- Manche Aufgaben lassen sich eher mit etwas Nachdenken und weniger mit viel Rechnen lösen!
- Überprüfen Sie Ihre Lösungen kritisch!

Aufgaben

1. Aufgabe

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

1) $\frac{4}{5}t - \frac{t}{10} + \frac{7}{15}t$

2) $\frac{3x}{8} - \frac{5}{12}x - \frac{4}{x}$

3) $-3(-4x \cdot x + 2x)$

4) $\frac{2a}{b} + \frac{a}{m} + \frac{a}{b}$

5) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

6) $-(2a + d)(-2d + a)$

7) $4x \cdot x - 3x \cdot y + 11x \cdot x + 16x - 40y + 3y \cdot x$

8) $60a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c + 10a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c - 30a \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c$

9) $\frac{y+2}{y-2} - \frac{2y-2}{y+4}$

10) $6 - (8x - 4y) + 2(10y - 7) + 12 - 18x$

2. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils die gesuchte Variable!

1) Gesucht: a mit $a = 2b + c$, $b = 3 + c$ und $c = 1$

2) Gesucht: s mit $2s = -4r - t + 12$, $r = 3t - 16$ und $t = 24$

3) Gesucht: x mit $x = a - 10 - 4z$, $2a = 18z + 2$ und $z = -5$

4) Gesucht: b mit $12b = 3l + \frac{1}{3}z + 11$, $2l = 2z - 14$ und $z = -9$

5) Gesucht: u mit $\frac{1}{5}u = 100 - 25v - 8w$, $2v = 16 - 8w$ und $-3w = 27$

3. Aufgabe

Sind die folgenden Gleichungen linear? Hinweis: Es ist *nicht* nach der Lösung der Gleichungen gefragt.

$$1) \frac{1}{7}x + 8 = -12 \cdot \frac{x}{6}$$

$$2) \cos(x + 2) = (21x - 1)(-9 + 18x)$$

$$3) 17 - 4x + 8x^2 = 11$$

$$4) \frac{1}{x} + 4 = -3(2x - 10)$$

$$5) 4(3y - 44) = (-y + 6) \cdot 17$$

$$6) x \cdot \sqrt{2} + 1 = 0$$

4. Aufgabe

Lösen Sie folgende Gleichungen und machen Sie - wenn möglich - die Probe! Bei den Aufgaben 1) bis 5) ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$1) 2x - 4 = -4x - 1$$

$$2) 3(2x - 1) = -5(17 + 7x)$$

$$3) 6(4x - 8) = (-12x + 24) \cdot (-2)$$

$$4) 3x(-4x - 10) = (2 - 2x) \cdot (6x + 15)$$

$$5) 4(4a - 1) = 8 \left(\frac{1}{2} + 2a \right)$$

$$6) -3(6y + 2) = 12y - 5 \text{ mit } \mathbb{D} = \mathbb{N}$$

5. Aufgabe

Pythagoras auf die Frage, wie viele Schüler er habe: „Die Hälfte studiert Mathematik, ein Viertel Physik, ein Siebtel lernt das Schweigen und der Rest sind 3 kleine Knaben.“

Erklärungen

Was ist...

... eine **Konstante**?

Ein Platzhalter für einen festen Zahlenwert

... eine **Variable**?

Ein Platzhalter für einen veränderlichen Zahlenwert

... ein **Koeffizient**?

Die Zahl in einem [Produkt](#) aus Zahl und Variable

... ein **Term**?

Eine mathematisch sinnvolle Kombination aus Zahlen, Konstanten, Variablen, Klammern und Rechenoperationen

... eine **Gleichung**?

Etwas in der Art: "ein Term = ein (anderer) Term"

Lineare Gleichungen

Definition: Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, in der ausschließlich folgende Terme auftreten:

- [Produkte](#) aus *einer* Variablen und Konstanten/Zahlen
- [Summen](#) aus diesen [Produkten](#) und Konstanten/Zahlen

Beispiele für lineare Gleichungen

$$3x + 4 = \frac{x}{3} - 12$$

Diese Gleichung ist linear, da die einzige Variable x nur mit Zahlenwerten und nicht mit sich selbst [multipliziert](#) wird. $\frac{x}{3}$ ist dabei nicht Anderes als $\frac{1}{3} \cdot x$. Dann werden noch Zahlen [addiert](#).

Das ist alles erlaubt.

$$-2(9t + 1) - 9(12 + 3t) = 0$$

Bei dieser Gleichung ist durch die Klammern nicht sofort zu erkennen, ob sie linear ist. Beim [Ausmultiplizieren](#) werden die Terme, die die Variable t enthalten, aber nur mit weiteren Zahlen multipliziert, sodass auch diese Gleichung linear ist. Würden Terme dieser Art $-2t(9t + 1)$ vorhanden sein, wäre das nicht der Fall.

$$\sqrt{16} \cdot x = 8$$

Diese Gleichung ist tatsächlich linear, denn $\sqrt{16}$ (also "[Wurzel](#) aus 16") sieht zwar kompliziert aus, ist aber einfach nur eine Zahl.

$$3x + 9y - 18z = 20$$

Auch diese Gleichung ist linear, da die Variablen nur mit Zahlen multipliziert werden. Anschließend werden diese Produkte addiert. Damit sind in dieser Gleichung nur erlaubte Terme enthalten. Nicht erlaubt wären beispielsweise die Terme $3xy$ oder $-18z \cdot z$, da hier Variablen miteinander multipliziert werden.

Beispiele für nicht lineare Gleichungen

$$\sin(x) - 3x = 4x - 10$$

Eine lineare Gleichung darf keine [trigonometrischen Funktionen](#), wie den Sinus, angewendet auf eine Variable enthalten.

$$\frac{1}{x} - 12 = 0$$

Hier wird durch eine Variable [geteilt](#). Das ist in linearen Gleichungen nicht erlaubt.

$$3z^2 - 7 = 90$$

In linearen Gleichungen dürfen Variablen zwar mit Zahlen, aber nicht mit Variablen [multipliziert](#) werden. z^2 ist dabei eine abkürzende Schreibweise für $z \cdot z$

$$\sqrt{16 \cdot x} = 8$$

Im Unterschied zu oben steht hier auch die Variable unter der [Wurzel](#). Das verletzt die Bedingungen für lineare Gleichungen.

Lösung einer Gleichung

Grundsätzlich bedeutet "**Gleichung lösen**", für die Variable alle Werte zu finden, die beim Einsetzen in die Gleichung beide Seiten der Gleichung gleich groß werden lassen. *Alle Werte* bedeutet, dass eine Gleichung durchaus mehrere Lösungen haben kann. Um diese Werte zu finden, wird die Gleichung durch Umformungen in eine Form gebracht, in der man diese Werte ablesen kann. Dabei ist eines wichtig: Die [Lösungsmenge](#) der Gleichung darf sich während der Umformungen nicht ändern, sonst wären die ausgerechneten Zahlenwerte ja keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Das heißt, einige Umformung helfen weiter, wenn man die Lösung einer Gleichung finden möchte - andere nicht. Die Umformungen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern, die einem also weiterhelfen, nennt man **Äquivalenzumformungen**. Es sind:

- die gleiche [reelle Zahl](#) oder das gleiche Vielfache einer Variablen auf beiden Seiten der Gleichung [addieren](#)
- beide Seiten der Gleichung mit der gleichen reellen Zahl, ausgenommen der 0, [multiplizieren](#)
- beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Term ungleich 0 multiplizieren
- Termvereinfachungen, wie [Klammern auflösen](#), Zahlen und Variablen zusammenfassen
- die beiden Seiten der Gleichung tauschen

Bemerkung: Bitte beachten Sie, dass in diesen Aussagen auch die [Subtraktion](#) und die [Division](#) enthalten sind.

Hier ein ungefährer Plan zum Lösen einer Gleichung:

1. [Klammern auflösen](#)
2. "Sortieren": Mithilfe der [Addition](#) alle Terme, die die Variable enthalten, auf die eine Seite der Gleichung bringen; alles ohne Variable auf die andere Seite. ACHTUNG: Die Variable muss nicht x heißen!
3. Die Terme auf beiden Seiten der Gleichung zusammenfassen
4. Durch den Koeffizienten der Variable teilen
5. Überprüfen, ob die als Lösung ermittelte Zahl im [Definitionsbereich](#) liegt. Nur wenn das der Fall ist, ist diese Zahl auch tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Bemerkung 1: Je nach Art der Gleichung kann man manchmal einen oder mehrere Schritte überspringen.

Bemerkung 2: Es ist egal, ob die Variable auf der rechten oder der linken Seite der Gleichung gesammelt wird, da die beiden Seiten einer Gleichung ja getauscht werden dürfen. $x = 2$ meint also das Gleiche wie $2 = x$

Zur Notation: Es hat sich eingebürgert, am Ende einer Gleichungszeile hinter einem senkrechten Strich anzugeben, welche Rechenoperationen / Umformungen auf die Gleichung in

diesem Schritt angewendet werden. Das muss man nicht machen, ist aber gerade am Anfang meist ziemlich hilfreich.

Lösbarkeit von linearen Gleichungen

Es schließt sich die Frage an: **Ist jede lineare Gleichung lösbar?**

Wir schauen uns dafür beispielhaft die folgenden drei Gleichungen an:

$$-2x + 1 = -2x + 2 - 1$$

Diese lineare Gleichung ist **mehrdeutig lösbar**. D.h., es gibt mehr als eine Zahl, die diese Gleichung löst. Um genau zu sein, gibt es sogar unendlich viele Lösungen. Rechnet man nämlich die Zahlen auf der rechten Seite zusammen, erhält man $-2x + 1 = -2x + 1$. Hier sieht man deutlich: Egal, welche Zahl man für x einsetzt, man erhält immer auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis. Was sollte auch sonst passieren, wenn die beiden Seiten der Gleichung identisch sind?

$$3x - 1 = 5$$

Diese lineare Gleichung ist **eindeutig lösbar**. D.h., es gibt genau eine Zahl, die diese Gleichung löst. Formt man sie um, indem man erst **1 addiert** und anschließend durch **3 teilt**, erhält man nämlich $x = 2$. Dies ist die einzige Lösung, denn keine andere Zahl ergibt **5**, wenn man sie mit **3 multipliziert** und anschließend **1 subtrahiert**.

$$4x = 4x + 1$$

Die lineare Gleichung ist **nicht lösbar**. D.h., es gibt keine Zahl, die diese Gleichung löst. Zieht man auf beiden Seiten $4x$ ab, was laut der Liste der Äquivalenzumformungen oben erlaubt ist, erhält man $0 = 1$. Das ist ein Widerspruch.

Zusammenfassung: Lineare Gleichungen können nicht lösbar, eindeutig lösbar oder mehrdeutig lösbar mit unendlich vielen Lösungen sein. Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

Überprüfen der gefundenen Lösungen

Um zu prüfen, ob die gefundene Zahl tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist, kann man die **Probe** machen, d.h. man setzt den gefundenen Wert in die Ausgangsgleichung ein und prüft, ob beide Seiten den selben Wert ergeben. Ist das nicht der Fall, sollte man nochmal nachrechnen...

Lösungen

1. Aufgabe

Eine Bemerkung vorab: Malpunkte zwischen den Variablen dürfen bei allen Aufgaben auch weggelassen werden. Das ist eigentlich die übliche Schreibweise. In diesem Kapitel wurden sie nur hingeschrieben, um deutlich zu machen, dass hier jeweils multipliziert wird.

$$1) \frac{4}{5}t - \frac{t}{10} + \frac{7}{15}t = \frac{24}{30}t - \frac{3}{30}t + \frac{14}{30}t = \frac{24-3+14}{30}t = \frac{35}{30}t = \frac{7}{6}t$$

Vorgehen: Brüche gleichnamig machen und addieren, anschließend kürzen

Bemerkung 1: Ob die Variable auf oder hinter dem Bruchstrich steht, ist egal.

Bemerkung 2: Da die Variablen alle nur mit Zahlenwerten (und nicht mit weiteren Variablen) multipliziert werden, dürfen diese Koeffizienten einfach addiert bzw. subtrahiert werden.

$$2) \frac{3x}{8} - \frac{5}{12}x - \frac{4}{x} = \frac{9x \cdot x}{24x} - \frac{10x \cdot x}{24x} - \frac{96}{24x} = \frac{9x \cdot x - 10x \cdot x - 96}{24x} = \frac{-x \cdot x - 96}{24x}$$

Vorgehen: Brüche gleichnamig machen und addieren

Bemerkung: Die Variable muss im Hauptnenner berücksichtigt werden, da sie beim dritten Bruch im Nenner steht.

$$3) -3(-4x \cdot x + 2x) = -3 \cdot (-4x \cdot x) - 3 \cdot 2x = 12x \cdot x - 6 \cdot x$$

Vorgehen: Klammern auflösen

Bemerkung: Auf das Minuszeichen vor der Klammer achten!

$$4) \frac{2a}{b} + \frac{a}{m} + \frac{a}{b} = \frac{2a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{m} = \frac{3a}{b} + \frac{a}{m} = \frac{3am}{bm} + \frac{ab}{bm} = \frac{3am + ab}{bm} = \frac{a(3m + b)}{bm}$$

Vorgehen: Brüche gleichnamig machen und addieren, anschließend ausklammern

Bemerkung: Den ersten und den dritten Bruch kann man sofort addieren, weil sie bereits den gleichen Nenner haben.

$$5) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1 \cdot (x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{1 \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

Vorgehen: Brüche gleichnamig machen und subtrahieren

Bemerkung 1: Auf das Minuszeichen zwischen den Klammern im Zähler achten! Hier müssen unbedingt Klammern gesetzt werden, da der gesamte Zähler des zweiten Bruches subtrahiert werden muss.

Bemerkung 2: Man könnte im Nenner noch die Klammern auflösen.

$$6) -(2a+d)(-2d+a) = -(-4a \cdot d + 2a \cdot a - 2d \cdot d + a \cdot d) = -(-3a \cdot d + 2a \cdot a - 2d \cdot d) = -2a \cdot a + 3a \cdot d + 2d \cdot d$$

Vorgehen: Klammern auflösen

Bemerkung: Auf das Minuszeichen vor den Klammern achten!

$$7) 4x \cdot x - 3x \cdot y + 11x \cdot x + 16x - 40y + 3y \cdot x = 4x \cdot x + 11x \cdot x - 3x \cdot y + 3x \cdot y + 16x - 40y = 15x \cdot x + 16x - 40y$$

Vorgehen: zusammenfassen

Bemerkung 1: Gleiche Produkte von Variablen dürfen addiert und subtrahiert werden. Dabei ändert sich nur der Koeffizient.

Bemerkung 2: Die Reihenfolge der Variablen in einem Produkt ist egal. Üblich ist, die Variablen in alphabetischer Reihenfolge aufzuschreiben, weil das die Übersicht erleichtert.

$$8) 60a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c + 10a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c - 30a \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c = 10a \cdot b \cdot c(6a \cdot a \cdot c + b \cdot b - 3c \cdot c)$$

Vorgehen: ausklammern

$$9) \frac{y+2}{y-2} - \frac{2y-2}{y+4} = \frac{(y+2)(y+4)}{(y-2)(y+4)} - \frac{(2y-2)(y-2)}{(y+4)(y-2)} = \frac{y \cdot y + 6y + 8}{(y-2)(y+4)} - \frac{2y \cdot y - 6y + 4}{(y-2)(y+4)} = \frac{y \cdot y + 6y + 8 - (2y \cdot y - 6y + 4)}{(y-2)(y+4)} = \frac{-y \cdot y + 12y + 4}{(y-2)(y+4)}$$

Vorgehen: Brüche gleichnamig machen und subtrahieren

Bemerkung 1: Beim Zusammenfassen der Brüche müssen Klammern um den Zähler des zweiten Bruches gesetzt werden, da sich das Minuszeichen sonst nicht auf den gesamten Zähler auswirkt.

Bemerkung 2: Man könnte im Nenner noch die Klammern auflösen.

$$10) 6 - (8x - 4y) + 2(10y - 7) + 12 - 18x = 6 - 8x + 4y + 20y - 14 + 12 - 18x = -26x + 24y + 4$$

Vorgehen: Klammern auflösen, anschließend zusammenfassen

2. Aufgabe

Wichtig: Treffen Punkt- und Strichrechnung aufeinander, müssen Klammern gesetzt werden!

$$\begin{aligned} 1) \\ a &= 2b + c & | \text{ Setze } b \text{ ein} \\ a &= 2(3 + c) + c & | \text{ Setze } c \text{ ein} \\ a &= 2(3 + 1) + 1 \\ a &= 2 \cdot 4 + 1 \\ a &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \\ 2s &= -4r - t + 12 & | \text{ Setze } r \text{ ein} \\ 2s &= -4(3t - 16) - t + 12 & | \text{ Setze } t \text{ ein} \\ 2s &= -4(3 \cdot 24 - 16) - 24 + 12 \\ 2s &= -4 \cdot 56 - 24 + 12 \\ 2s &= -224 - 24 + 12 \\ 2s &= -236 & | : 2 \\ s &= -118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \\ 2a &= 18z + 2 & | : 2 \\ a &= 9z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a - 10 - 4z & | \text{ Setze } a \text{ ein} \\ x &= 9z + 1 - 10 - 4z & | \text{ Setze } z \text{ ein} \\ x &= 9 \cdot (-5) + 1 - 10 - 4 \cdot (-5) \\ x &= -45 + 1 - 10 + 20 \\ x &= -44 - 10 + 20 \\ x &= -34 \end{aligned}$$

Bemerkung: Um x zu berechnen, muss in der entsprechenden Zeile a eingesetzt werden. Es ist aber kein Term für a gegeben, sondern nur einer für $2a$. Daher muss diese Zeile zunächst umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 4) \\ 2l &= 2z - 14 & | : 2 \\ l &= z - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12b &= 3l + \frac{1}{3}z + 11 & | \text{ Setze } l \text{ ein} \\ 12b &= 3(z - 7) + \frac{1}{3}z + 11 & | \text{ Setze } z \text{ ein} \\ 12b &= 3(-9 - 7) + \frac{1}{3} \cdot (-9) + 11 \\ 12b &= 3 \cdot (-16) - 3 + 11 \\ 12b &= -48 - 3 + 11 \\ 12b &= -40 & | : 12 \\ b &= -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \\ 2v &= 16 - 8w & | : 2 \\ v &= 8 - 4w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3w &= 27 & | : (-3) \\ w &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}u &= 100 - 25v - 8w & | \text{ Setze } v \text{ ein} \\ \frac{1}{5}u &= 100 - 25(8 - 4w) - 8w & | \text{ Setze } w \text{ ein} \\ \frac{1}{5}u &= 100 - 25(8 - 4 \cdot (-9)) - 8 \cdot (-9) \\ \frac{1}{5}u &= 100 - 25(8 + 36) + 72 \\ \frac{1}{5}u &= 100 - 25 \cdot 44 + 72 \\ \frac{1}{5}u &= 100 - 1100 + 72 \\ \frac{1}{5}u &= -928 & | \cdot 5 \\ u &= -4640 \end{aligned}$$

3. Aufgabe

- 1) Es handelt sich um eine lineare Gleichung.
- 2) Es handelt sich nicht um eine lineare Gleichung.
- 3) Es handelt sich nicht um eine lineare Gleichung.
- 4) Es handelt sich nicht um eine lineare Gleichung.
- 5) Es handelt sich um eine lineare Gleichung.
- 6) Es handelt sich um eine lineare Gleichung.

4. Aufgabe

Ein Hinweis vorweg: Wird eine Gleichung gelöst, sollte das Ergebnis in Form einer Lösungsmenge angegeben werden. Da nach der Rechnung immer geprüft werden muss, ob der berechnete Wert im Definitionsbereich liegt (also ob er als Lösung grundsätzlich infrage kommt), ist die Zahl, die in der letzten Zeile steht, ist nicht automatisch eine Lösung der Gleichung.

Für die Gleichungen 1) bis 5) gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1) \\ 2x - 4 &= -4x - 1 & | & +4x + 4 \\ 2x + 4x &= -1 + 4 \\ 6x &= 3 & | & :6 \\ x &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{L} &= \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 &= -4 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - 4 &= -2 - 1 \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage. Die gefundene Lösung ist also richtig.

$$\begin{aligned} 2) \\ 3(2x - 1) &= -5(17 + 7x) \\ 6x - 3 &= -85 - 35x & | & -6x + 85 \\ -3 + 85 &= -35x - 6x \\ 82 &= -41x & | & :(-41) \\ -2 &= x \\ \mathbb{L} &= \{-2\} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 3(2 \cdot (-2) - 1) &= -5(17 + 7 \cdot (-2)) \\ 3(-4 - 1) &= -5(17 - 14) \\ 3 \cdot (-5) &= -5 \cdot 3 \\ -15 &= -15 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage. Die gefundene Lösung ist also richtig.

$$\begin{aligned} 3) \\ 6(4x - 8) &= (-12x + 24) \cdot (-2) \\ 24x - 48 &= 24x - 48 & | & -24x + 48 \\ 24x - 24x &= -48 + 48 \\ 0 &= 0 \\ \mathbb{L} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bemerkung: Unabhängig davon, welches Element des Definitionsbereichs in diese Gleichung eingesetzt wird, erhält man immer auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis. $0 = 0$ ist schließlich immer richtig... Jede reelle Zahl löst also diese Gleichung, d.h. die Lösungsmenge entspricht dem Definitionsbereich.

$$\begin{aligned} 4) \\ 3x(-4x - 10) &= (2 - 2x) \cdot (6x + 15) \\ -12x^2 - 30x &= 12x + 30 - 12x^2 - 30x & | & +12x^2 + 30x - 12x \\ -12x^2 + 12x^2 - 30x + 30x - 12x &= 30 \\ -12x &= 30 & | & :(-12) \\ x &= -\frac{30}{12} = -\frac{5}{2} \\ \mathbb{L} &= \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (-4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 10) &= (2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)) \cdot (6 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 15) \\ -\frac{15}{2} \cdot (10 - 10) &= (2 + 5) \cdot (-15 + 15) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage. Die gefundene Lösung ist also richtig.

$$\begin{aligned} 5) \\ 4(4a - 1) &= 8\left(\frac{1}{2} + 2a\right) \\ 16a - 4 &= 4 + 16a & | & -16a + 4 \\ 16a - 16a &= 4 + 4 \\ 0 &= 8 \\ \mathbb{L} &= \emptyset \end{aligned}$$

Bemerkung: Beim Umformen der Gleichung entsteht ein Widerspruch: $0 = 8$ kann nie stimmen. Daher ist diese Gleichung nicht lösbar. Die Lösungsmenge ist leer.

6)

$$\begin{array}{rcl}
-3(6y + 2) & = & 12y - 5 \\
-18y - 6 & = & 12y - 5 \quad | \quad -12y + 6 \\
-18y - 12y & = & -5 + 6 \\
-30y & = & 1 \quad | \quad :(-30) \\
y & = & -\frac{1}{30} \\
L & = & \emptyset
\end{array}$$

Bemerkung: Als Definitionsbereich ist hier die [Menge der natürlichen Zahlen](#) ($\mathbb{D} = \mathbb{N}$) gegeben. $-\frac{1}{30}$ ist aber bekanntermaßen keine natürliche Zahl ($-\frac{1}{30} \notin \mathbb{N}$). Also kann für diese Gleichung keine Zahl gefunden werden, die beide Seiten gleich groß werden lässt und im Definitionsbereich liegt. Auch hier ist die Lösungsmenge leer.

5. Aufgabe

Sei x die Anzahl der Schüler des Pythagoras'.
Dann "übersetzt" man:

- "die Hälfte studiert Mathematik" mit $\frac{x}{2}$
- "ein Viertel studiert Physik" mit $\frac{x}{4}$
- "ein Siebtel lernt das Schweigen" mit $\frac{x}{7}$

Zusammen ergibt sich also:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 \quad | \quad \text{erweitern} \\
x & = & \frac{14x}{28} + \frac{7x}{28} + \frac{4x}{28} + 3 \quad | \quad \cdot 28 \\
28x & = & 14x + 7x + 4x + 84 \\
28x & = & 25x + 84 \quad | \quad -25x \\
3x & = & 84 \quad | \quad \cdot \frac{1}{3} \\
x & = & 28
\end{array}$$

Pythagoras hat also 28 Schüler.

Bemerkung zu Textaufgaben allgemein: Der erste Schritt beim Lösen einer Textaufgabe ist immer, sich die benötigten Variablen zu definieren. Anders formuliert: Es muss die Frage "Was ist hier eigentlich gesucht?" beantwortet werden. Das ist zum einen wichtig, um die Logik der Aufgabe zu durchschauen. Zum anderen kann nur dann eine sinnvolle Gleichung formuliert werden, wenn klar ist, was die Variablen genau bezeichnen. Welche Bezeichnung Sie dabei wählen, ist nicht wichtig. Es hat eine gewisse Tradition, die unbekannte Größe x zu nennen. Wenn sich aus inhaltlichen Gründen eine andere Bezeichnung anbietet (hier könnte man z.B. die Anzahl der Schüler auch gut s nennen), spricht nichts dagegen, diese Bezeichnung zu verwenden. Im Gegenteil, solche Benennungen können helfen, eine möglicherweise komplexere Aufgabe samt Lösung übersichtlich zu halten. Den Antwortsatz nicht vergessen!